

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Золотое сечение в цикле Карно

В.В. Попков, Е.В. Шипицын

Анализируются некоторые аспекты классической термодинамики на предмет наличия в ней двойственности и золотого сечения.

PACS numbers: 01.55. + b, 01.70. + w, 02.10.Lh, 05.70. – a

Золотое сечение представляет собой одно из наиболее ярких проявлений гармонии природы. Оно возникает как результат решения задачи о делении целого на две неравные части так, чтобы отношение меньшей части (a) к большей (b) равнялось бы отношению большей части к целому [1, 2]:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}. \quad (1)$$

Требование (1) удовлетворяется при выполнении условия

$$\frac{b}{a+b} = \varphi, \quad (2)$$

где

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \equiv 0,6180\dots, \quad (3)$$

причем величина φ представляет собой единственный положительный корень уравнения

$$\varphi^2 + \varphi = 1 \quad (4)$$

и называется золотым сечением.

Интерес к пропорциональному делению целого на две части (1) впервые возник еще в античной науке (Пифагор, Платон, Евклид) [3, 4]. Во времена средневековья исследованием данной проблемы занимался итальянский математик Фибоначчи [5]. В эпоху Возрождения пропорция (1)–(3) была возведена в ранг главного эстетического принципа: Иоганн Кеплер говорил о ней как о "бесценном сокровище", а Леонардо да Винчи дал ей название "золотое сечение" (sectio aurea), сохранив-

шееся вплоть до наших дней [6]. В XIX веке немецкий ученый Цейзинг вновь "открыл" золотое сечение при попытке сформулировать всеобщий закон пропорциональности: "Для того чтобы целое, разделенное на две неравные части, казалось прекрасным с точки зрения формы, между меньшей и большей частями должно быть то же отношение, что и между большей частью и целым" [7]. Цейзингом и его последователями было показано, что пропорции золотого сечения (или близкие к ним) встречаются в человеческом теле, античных храмах и скульптурах, конфигурациях растений и минералов, музыкальных аккордах [1, 7]. В XX веке интерес к золотому сечению возродился с новой силой. Оно было найдено (или использовано) в астрономии [6, 8], биологии [9], психологии [10], вычислительной технике [11], музыке [2, 12], архитектуре [2, 6, 13] и других отраслях науки и искусства. Таким образом, золотое сечение владело мыслью и чувствами многих выдающихся ученых прошлого и продолжает волновать умы наших современников.

Существует Международная ассоциация (The Fibonacci Association), которая ежегодно проводит конференции, посвященные изучению чисел Фибоначчи и их приложениям. Несомненный интерес представляет поиск золотого сечения в тех областях научного познания, в которых оно до сих пор еще не было обнаружено, — например, в теоретической физике. Наиболее перспективным в плане такого поиска, по-видимому, является тот ее раздел, который (как и золотое сечение) характеризуется максимальной фундаментальностью и гармоничностью. Таким разделом теоретической физики нам представляется термодинамика — наука об изучении тепловой формы движения материи [14, 15], об особой роли которой в научном познании мира писал Альберт Эйнштейн: "Глубокое впечатление произвела на меня термодинамика. Это единственная физическая теория общего содержания, относительно которой я убежден, что в рамках применимости ее основных понятий она никогда не будет опровергнута" [16].

Огромную роль в становлении и развитии термодинамики сыграл цикл Карно. Этот цикл был предложен в ходе первого теоретического изучения тепловых машин с целью повышения их эффективности [17] и является базовым камнем в фундаменте классической

В.В. Попков, Е.В. Шипицын. Международный институт А. Богданова, 620062 Екатеринбург, ул. Чебышева 4, Российская Федерация
Тел. (3432) 65-90-20, (095) 973-47-50
E-mail: ibi@uvtb.ru

Статья поступила 2 июля 2000 г.,
после доработки 21 сентября 2000 г.

термодинамики, а его автор — французский физик и военный инженер Сади Карно — по праву считается основоположником термодинамической науки [18]. С его помощью С. Карно и его последователями были установлены общие термодинамические законы и получены многие конкретные результаты [14, 18].

Известно, что тепловая машина — это устройство, служащее для циклического превращения теплоты в работу. Эффективность тепловой машины определяется ее коэффициентом полезного действия (к.п.д.) η , который представляет собой отношение работы A , совершенной машиной за один цикл, к теплоте Q_1 , поглощенной ею за этот цикл [19]:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (5)$$

В целях обеспечения возможности периодической деятельности тепловой машины ее рабочее тело (газ) в конце каждого цикла должно возвращаться в исходное термодинамическое состояние; а для этого, согласно второму началу термодинамики [14], необходимо какую-то часть поглощенной теплоты (обозначим ее Q_2) отдавать внешним телам, что приводит к справедливости соотношения [19]

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (6)$$

Следовательно, в тепловой машине необходим не только нагреватель (горячее тело), но и холодильник (холодное тело). Основная идея С. Карно заключается как раз в том, что тепловая машина производит работу не за счет поглощения теплоты, а благодаря передаче теплоты от горячего тела к холодному [17]. Таким образом, для превращения теплоты в работу требуется двухполюсная система "нагреватель–холодильник". В дальнейшем температуру нагревателя мы будем обозначать символом T_1 , а температуру холодильника — символом T_2 ($T_2 < T_1$).

Еще одной фундаментальной идеей С. Карно является утверждение о возможности обращения цикла тепловой машины и превращения ее тем самым в холодильную машину, которая (в противоположность тепловой машине) потребляет (а не производит) работу, но при этом передает теплоту от холодильника к нагревателю, т.е. создает разность температур [15, 17]. Так как назначение холодильной машины заключается в охлаждении холодильника, то естественно определить ее к.п.д. λ как отношение отобранной у холодильника теплоты Q_2 к затраченной на это работе A [19]:

$$\lambda = \frac{Q_2}{A}. \quad (7)$$

Определения (5) и (7) построены по единому принципу: к.п.д. представляет собой отношение требуемого результата к необходимым затратам.

Итак, одно и то же устройство теоретически может работать и как тепловая, и как холодильная машина. Таким образом, тепловая машина является двойственным объектом в том смысле, что потенциально в ней всегда заложена еще и холодильная машина (т.е. в данном случае мы явно наблюдаем две структуры в одном теле).

Получим теперь явный вид к.п.д. η идеальной тепловой машины (работающей по циклу Карно) и к.п.д. λ обратной ей холодильной машины (работающей по обратному циклу Карно). Интегрирование математического выражения второго начала термодинамики

$$\delta Q = T dS \quad (8)$$

в случае цикла Карно дает [14]

$$Q_1 = (S_2 - S_1)T_1, \quad Q_2 = (S_2 - S_1)T_2, \quad (9)$$

где S_1 и S_2 — соответственно минимальная и максимальная энтропия, достигаемая в цикле Карно. Подставляя (6) и (9) в (5) и (7), получаем

$$\eta = 1 - \tau, \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\tau}{1 - \tau}, \quad (11)$$

где величина τ представляет собой отношение температур холодильника и нагревателя идеальной тепловой машины:

$$\tau = \frac{T_2}{T_1}. \quad (12)$$

Исключая величину τ из соотношений (10) и (11), получаем выражение

$$(1 + \lambda)\eta = 1, \quad (13)$$

связывающее воедино две ветви (тепловую и холодильную машины) рассматриваемого двойственного объекта (идеальной тепловой машины).

В случае равноправия обеих вышеуказанных ветвей (т.е. при одинаковой эффективности тепловой и холодильной машин, объединенных в одном устройстве — идеальной тепловой машине) тепловой и холодильный к.п.д. цикла Карно равны друг другу, т.е. справедливо соотношение

$$\lambda = \eta, \quad (14)$$

с учетом которого уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\eta^2 + \eta = 1. \quad (15)$$

Сравнение (15) и (4) с учетом $\eta > 0$ [14] дает

$$\eta = \varphi, \quad (16)$$

т.е. тепловой и холодильный к.п.д. цикла Карно в случае их совпадения представляют собой золотое сечение.

Подставляя (16) в (10), с учетом (4) получаем

$$\tau = \varphi^2, \quad (17)$$

т.е. условием совпадения теплового и холодильного к.п.д. цикла Карно является равенство отношения температур холодильника и нагревателя идеальной тепловой машины квадрату золотого сечения.

Из (16) и (17) имеем выражение

$$\frac{\tau}{\eta} = \varphi, \quad (18)$$

которое вместе с вытекающим из (10) соотношением

$$\tau + \eta = 1 \quad (19)$$

свидетельствует о том, что в случае одинаковой эффективности тепловой и холодильной машин, заключенных в идеальной тепловой машине, имеет место деление единичного отрезка по золотому сечению [2].

Таким образом, установление равноправия (т.е. введение симметрии) между двумя ветвями двойственной структуры цикла Карно ("прямой цикл – обратный цикл", или "тепловая машина – холодильная машина") приводит к появлению в нем пропорций золотого сечения (т.е. к возникновению гармонии). Однако всего существует три числовых закона гармонии — золотое сечение, симметрия и асимметрия (или нарушенная симметрия), причем все они тесно связаны между собой [2]. Поэтому можно предположить, что, наряду с симметричным поведением (14) двух ветвей двойственной структуры цикла Карно, к золотому сечению в нем должно приводить и какое-то асимметричное их поведение.

И действительно, в случае справедливости соотношения

$$\lambda = \eta^{-1/2} \quad (20)$$

уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\eta + \eta^{1/2} = 1. \quad (21)$$

Сравнение (21) и (4) дает:

$$\eta = \varphi^2. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20) и (10), с учетом (4) получаем

$$\lambda = \varphi^{-1}, \quad (23)$$

$$\tau = \varphi. \quad (24)$$

Наконец, из (22) и (24) имеем

$$\frac{\eta}{\tau} = \varphi. \quad (25)$$

Итак, в случае такого неравноправия двух ветвей двойственной структуры идеальной тепловой машины ("тепловая машина – холодильная машина"), при котором ее тепловой и холодильный к.п.д. связаны соотношением (20), в цикле Карно вновь возникают пропорции золотого сечения (22) – (25).

Таким образом, нам удалось найти связь между золотым сечением и циклом Карно, который представляет собой одно из основных положений термодинамической науки. Золотое сечение, ранее наблюдавшееся в самых разных областях науки, искусства и человеческой деятельности, теперь обнаружено и в одном из важнейших разделов теоретической физики — термодинамике.

Список литературы

1. Тимердинг Г Е *Золотое сечение* (Петроград: Научное книгоизд-во, 1924)
2. Шевелев И Ш, Марутаев М А, Шмелев И П *Золотое сечение* (М.: Стройиздат, 1990)
3. Евклид *Начала Евклида* (Пер. с греч. и коммент. Д Д Мордухай-Болтовского) (Под ред. М Я Выгодского, И Н Веселовского) (М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949 – 1950)
4. Ахутин А В *История принципов физического эксперимента. От античности до XVII в.* (М.: Наука, 1976)
5. Воробьев Н Н *Числа Фибоначчи* 6-е изд. (М.: Наука, 1992)
6. Лебедев Ю С и др. *Архитектурная бионика* (Под ред. Ю С Лебедева) (М.: Стройиздат, 1990)
7. Гика М *Эстетика пропорций в природе и искусстве* (М.: Изд-во Академии архитектуры, 1936)
8. Бутусов К П "Золотое сечение в Солнечной системе", в сб. *Астрометрия и небесная механика* (сб. статей, посв. 90-летию со дня рожд. А.А. Михайлова) (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1978)
9. Петухов С В *Биомеханика, бионика и симметрия* (М.: Наука, 1981)
10. Лефевр В А *Формула человека (Контуры фундаментальной психологии)* (М.: Прогресс, 1991)
11. Стахов А П *Коды золотой пропорции* (М.: Радио и связь, 1984)
12. Сабанеев Л *Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения* (М.: Искусство, 1925)
13. Ле Корбюзье *Архитектура XX века* (М.: Прогресс, 1970)
14. Базаров И П *Термодинамика* (М.: Высшая школа, 1991)
15. Румер Ю Б, Рывкин М С *Термодинамика, статистическая физика и кинетика* 2-е изд. (М.: Наука, 1977)
16. Эйнштейн А *Физика и реальность* (М.: Наука, 1965)
17. Карно С *Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу (Второе начало термодинамики)* (Под ред. А К Тимирязева) (М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934) с. 15
18. Бродянский В М *Сади Карно (1796 – 1832)* (М.: Наука, 1993)
19. Фен Дж Б *Машины, энергия, энтропия* (М.: Мир, 1986)

Golden section in the Carnot cycle

V.V. Popkov, E.V. Shipitsyn

A. Bogdanov International Institute
ul. Chebysheva 4, 620062 Ekaterinburg, Russian Federation
Tel. (7-3432) 65-90 20, (7-095) 973-47 50
E-mail: ibi@uvtb.ru

Some aspects of classical thermodynamics are analyzed for presence of duality and of the golden section.

PACS numbers: 01.55. + b, 01.70. + w, 02.10.Lh, 05.70. – a

Bibliography — 19 references

Received 2 July 2000, revised 21 September 2000